الجمهورية العربية السورية
جامعة البعث
كلية العلوم
قسم رياضيات

٥٠

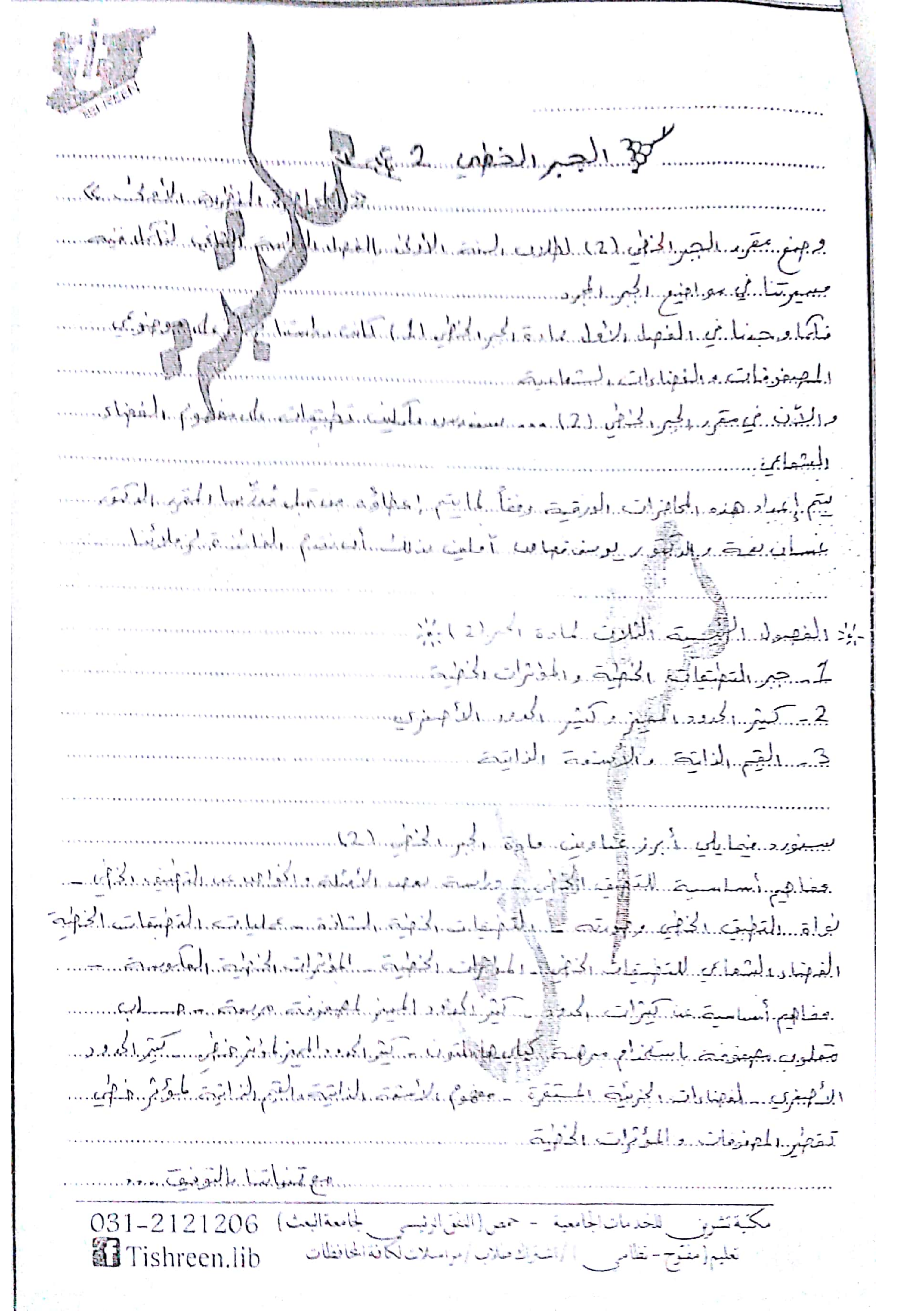


الجبر الخطي (2)

(نظري)

المحاضرة (1)

السنة الأولى _ الفصل الثاني



الجبر الخطي 2

« [illegible] »

وضع مقرر الجبر الخطي (2) لطلاب السنة الأولى الفصل الدراسي الثاني لتكملة مسيرتنا في مواضيع الجبر المجرد
فكما وجدنا في الفصل الأول مادة الجبر الخطي (1) كانت دراستنا تدور حول موضوعي المصفوفات والفضاءات الشعاعية
والآن في مقرر الجبر الخطي (2) ... سنقوم بتكملة تطبيقات لمفهوم الفضاء الشعاعي.
يتم إعداد هذه المحاضرات الورقية وفقاً لما يتم إعطاؤه من قبل مدرسا المقرر الدكتورة بسام نعمة والدكتور يوسف نعمان آملين بذلك أن تعم الفائدة لجميعنا

الفصول الرئيسية الثلاث لمادة الجبر (2):

1- جبر التطبيقات الخطية والمؤثرات الخطية
2- كثير الحدود المميز وكثير الحدود الأصغري
3- القيم الذاتية والأشعة الذاتية

سنورد فيما يلي أبرز عناوين مادة الجبر الخطي (2)
مفاهيم أساسية للتطبيق الخطي - دراسة بعض الأمثلة والأشكال عن التطبيق الخطي - نواة التطبيق الخطي وصورته - التطبيقات الخطية المتقابلة - عمليات على التطبيقات الخطية - الفضاء الشعاعي للتطبيقات الخطية - المؤثرات الخطية - المؤثرات الخطية العكوسة - مفاهيم أساسية عن كثيرات الحدود - كثير الحدود المميز لمصفوفة مربعة ... مقلوب مصفوفة باستخدام مبرهنة كايلي هاملتون - كثير الحدود المميز لمؤثر خطي - كثير الحدود الأصغري - الفضاءات الجزئية المستقرة - مفهوم الأشعة الذاتية والقيم الذاتية لمؤثر خطي - تقطير المصفوفات والمؤثرات الخطية

مع تمنياتنا بالتوفيق.....

نبدأ المحاضرة الأولى بالتطبيقات الخطية :

التطبيقات الخطية

ليكن لدينا U و V الفضائين الشعاعيين أو المتجهين على حقل K
وليكن f تطبيقاً من الفضاء المتجهي U إلى الفضاء المتجهي V
حيث $f : U \to V$

※ نقول عن f أنه تطبيقاً خطياً إذا حقق الشرطين

ش1 : $f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2)$
أي أن صورة مجموع شعاعين = مجموع الصور

ش2 : $f(\alpha u) = \alpha . f(u)$
وذلك $\forall \alpha \in K \; , \; \forall u \in U$

إن الشرطين السابقين يكافئان شرطاً واحداً هو
$f : U \to V \Leftrightarrow f(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha f(u_1) + \alpha f(u_2)$

مثال : ليكن $f : R^3 \to R^2$ تطبيقاً معرفاً بالشكل
$(x , y , z) \to (x - z \, , \, y + z)$
والمطلوب : أثبت أن f تطبيقاً خطياً

الحل : لكي نثبت ذلك يجب أن يحقق الشرطين

الإثبات

① ليكن $u_1(x_1 , y_1 , z_1)$ و $u_2(x_2 , y_2 , z_2)$
عندئذ

$f(u_1+u_2) = f((x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2))$

$= f(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$

$= [x_1+x_2-(z_1+z_2), (y_1+y_2+z_1+z_2)]$

$= [(x_1-z_1)+(x_2-z_2), (y_1+z_1)+(y_2+z_2)]$

$= [(x_1-z_1, y_1+z_1) + (x_2-z_2, y_2+z_2)]$

$= f(x_1, y_1, z_1) + f(x_2, y_2, z_2)$

إذاً الشرط الأول محقق

$f(\alpha u)$; $u(x,y,z)$ (2)

$f(\alpha u) = f(\alpha x, \alpha y, \alpha z)$

$= (\alpha x - \alpha z, \alpha y + \alpha z)$

$= \alpha(x-z, y+z)$

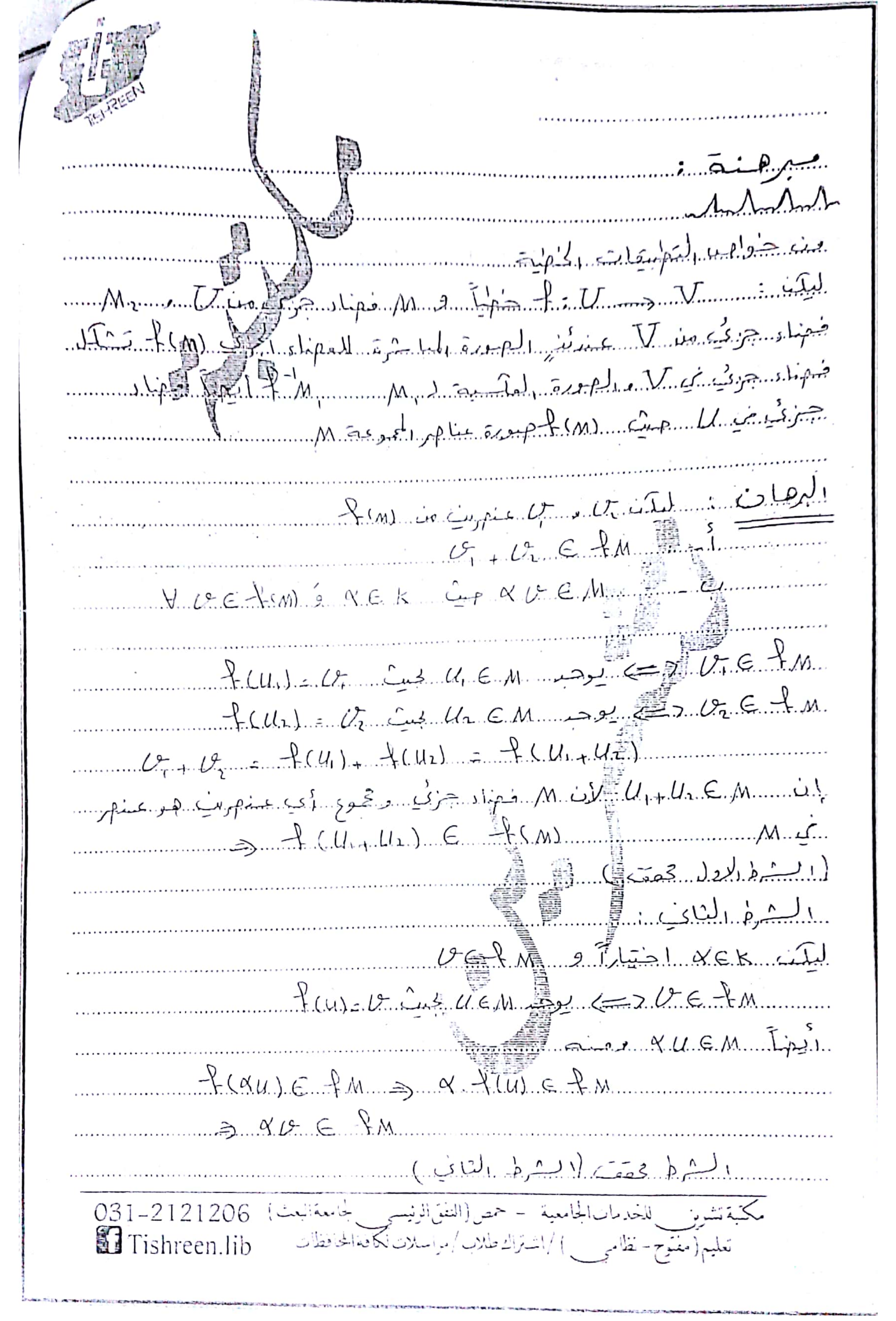
$= \alpha f(x,y,z) = \alpha f(u)$

إذاً الشرط الثاني محقق

ومنه f تطبيقاً خطياً

☼ ملاحظة: يمكن تعميم التعريف الثاني للفضاء الشعاعي بأن نقول f تطبيقاً خطياً $\Leftrightarrow$ $f(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n)$

$= \alpha_1 f(u_1) + \alpha_2 f(u_2) + \dots + \alpha_n f(u_n)$



مبرهنة :

من خواص التطبيقات الخطية

ليكن : $f: U \to V$ خطياً و M فضاء جزئي من U و M_2 فضاء جزئي من V عندئذٍ الصورة المباشرة لـ M أي $f(M)$ تشكل فضاء جزئي في V والصورة العكسية لـ M_1 أي $f^{-1}M_1$ فضاء جزئي في U حيث $f(M)$ صورة عناصر المجموعة M

البرهان : ليكن v_1 و v_2 عنصرين من $f(M)$

أي $v_1 + v_2 \in fM$

ب- $\alpha v \in M$ حيث $\forall v \in f(M)$ و $\alpha \in K$

$v_1 \in fM \Leftarrow$ يوجد $u_1 \in M$ بحيث $f(u_1) = v_1$

$v_2 \in fM \Leftarrow$ يوجد $u_2 \in M$ بحيث $f(u_2) = v_2$

$v_1 + v_2 = f(u_1) + f(u_2) = f(u_1 + u_2)$

إن $u_1 + u_2 \in M$ لأن M فضاء جزئي ومجموع أي عنصرين هو عنصر في M

$\Rightarrow f(u_1 + u_2) \in f(M)$

(الشرط الأول محقق)

الشرط الثاني :

ليكن $\alpha \in K$ اختيارياً و $v \in fM$

$v \in fM \Leftarrow$ يوجد $u \in M$ بحيث $f(u) = v$

أيضاً $\alpha u \in M$ ومنه

$f(\alpha u) \in fM \Rightarrow \alpha f(u) \in fM$

$\Rightarrow \alpha v \in fM$

الشرط محقق (الشرط الثاني)

* برهان المكتسب *

$f: V \to U$ خطي و M_1 فضاء جزئي من V والمطلوب

أثبت أن $f^{-1}(M_1)$ فضاء جزئي

ليكن u_1, u_2 من $f^{-1}(M_1)$ عندئذ

(1) $u_1 + u_2 \in f^{-1}(M_1)$

(2) $\forall u \in f^{-1}(M_1) ; \alpha u \in f^{-1}(M_1)$

$u_1 \in f^{-1}(M_1) \Longleftrightarrow$ يوجد $v_1 \in M_1$ بحيث $f^{-1}(v_1) = u_1$

$u_2 \in f^{-1}(M_1) \Longleftrightarrow$ يوجد $v_2 \in M_1$ بحيث $f^{-1}(v_2) = u_2$

$u_1 + u_2 = f^{-1}(v_1) + f^{-1}(v_2) = f^{-1}(v_1 + v_2)$

$v_1 + v_2 \in M_1 \Rightarrow f^{-1}(v_1 + v_2) \in f^{-1}(M_1) \Rightarrow u_1 + u_2 \in f^{-1}(M_1)$

وبطريقة مشابهة نبرهن $\forall u \in f^{-1}(M_1)$

$\forall \alpha \in K$

$\Rightarrow \alpha u \in f^{-1}(M_1)$

« انتهت المحاضرة الأولى »

« مع تمنياتنا لكم بالتوفيق والنجاح » إعداد : فاطمة الشمسيني